

## ANALYSIS OF ESTIMATION POSSIBILITY OF TYRE'S LONGITUDINAL SLIP STIFFNESS ON THE BASIS OF QUASI-STATIC LABORATORY INVESTIGATIONS

Jerzy Jackowski, Witold Luty, Marcin Wieczorek

Wojskowa Akademia Techniczna  
Instytut Pojazdów Mechanicznych i Transportu,  
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa  
tel.: +48 22 6839877, fax: +48 22 6837232  
e-mail: m.wieczorek@wme.wat.edu.pl

### Abstract

*In this paper, a special attention was focused on tyre proprieties in area of its small tread deformation. There was described a relationship between tyre longitudinal elasticity characteristics and function  $F_X(s)$ . There was planned and realized laboratory research of few car tyres. Basing on research results, there was determined equation of regress, which enables estimation of tyres longitudinal slip stiffness. The main attention is directed in the paper on description phenomena occurring in zone of the point of junction of the tyre with ground and on possibilities value designation of coefficients of models of tyres. Simulation researches of movement dynamics of the vehicle were put-upon in the example of the modelling. The phenomena modelling in the area of tyre contact with ground and characterizations of the perimetrical tyre elasticity are presented in the paper. Carried out own researches dealt five objects. Research took over appointment of the perimetric elasticity characteristics of tyres and lengths of the tyre trace*

*Performed analysis and conducted experiment let on formulation of dependence between static laboratory-research performance and results of dynamic research of the coefficient of the slide tyre longitudinal rigidity.*

**Keywords:** pneumatic tyre, tread of tyre, tyre longitudinal elasticity characteristics, longitudinal slip stiffness

## ANALIZA MOŻLIWOŚCI OSZACOWANIA WZDŁUŻNEJ SZTYWNOŚCI POŚLIZGOWEJ OPON NA PODSTAWIE STATYCZNYCH BADAŃ LABORATORYJNYCH

### Streszczenie

*W pracy szczególną uwagę skupiono na właściwościach opony w obszarze jej małych odkształceń bieżnika. Zaproponowano zależność wiążącą charakterystykę obwodową i charakterystykę opony opisaną funkcją  $F_X(s)$ . Zaplanowano i przeprowadzono badania laboratoryjne opon samochodów osobowych. Wyniki badań posłużyły do wyznaczenia równania regresji pozwalającego na zadowalająco wiarygodne oszacowanie wzdużnej sztywności poślizgowej opon. Główna uwaga skupiona została w artykule na opisie zjawisk zachodzących w strefie styku opony z podłożem oraz na możliwościach określenia wartości współczynników modeli opon. Badaniach symulacyjne dynamiki ruchu pojazdu zostały wykorzystane w przykładzie modelowania. Modelowanie zjawisk w obszarze styku opony z podłożem oraz charakterystyki sprężystości obwodowej opony są prezentowane w artykule. Przeprowadzone badania własne dotyczyły pięciu obiektów. Badania objęły wyznaczenie charakterystyk sprężystości obwodowej opon i długości śladu opony.*

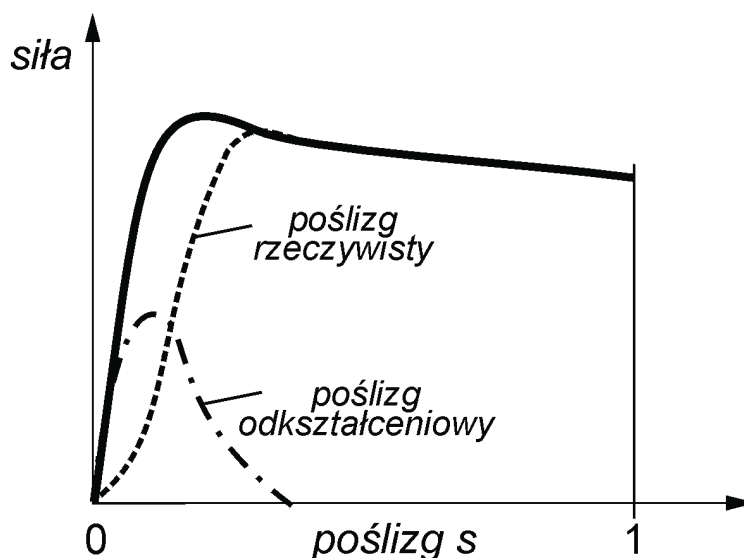
*Wykonana analiza i przeprowadzony eksperyment pozwoliły na sformułowanie zależności pomiędzy wynikami statycznych badań laboratoryjnych i rezultatami badań dynamicznych współczynnika wzdużnej sztywności poślizgowej opony*

**Słowa kluczowe:** opona pneumatyczna, bieżnik opony, charakterystyka sprężystości wzdużnej opony, wzdużna sztywność poślizgowa

## 1. Wstęp

Obciążenie opony momentem hamowania lub momentem napędowym powoduje powstanie siły wzdłużnej w obszarze styku koła z podłożem. W literaturze siła ta przedstawiana jest zwykle w funkcji poślizgu  $s$  (rys.1). Na przebiegu linii tej charakterystyki przy małych wartościach poślizgu przyrost wartości siły jest liniowy, przy wartości poślizgu około  $s=0.2$  siła wzdłużna osiąga wartość maksymalną, a następnie wartości siły zmniejszają się przy dalszym zwiększaniu wartości poślizgu. Przebieg zjawisk pokazany na rysunku 1 opisuje model Fiala-Sakai [4], który wyjaśnia je występowaniem w strefie współpracy bieżnika z podłożem dwóch obszarów. W pierwszym z nich występy bieżnika podlegają odkształceniu bez przesunięcia względem podłoża (poślizg odkształceniowy, zjawisko adhezji), w drugim przesuwają się względem podłoża (poślizg rzeczywisty).

W pracy główną uwagę skupiono na opisie zjawisk zachodzących w strefie styku opony z podłożem oraz możliwościach określenia wartości współczynników modeli opon wykorzystywanych na przykład w badaniach symulacyjnych dynamiki ruchu pojazdu. Autorzy w pracy podjęli również próbę odnalezienia relacji pomiędzy wybranymi rezultatami badań dynamicznych i statycznych ogumienia samochodów osobowych.



Rys. 1. Siła wzdłużna w funkcji poślizgu [1]

Fig. 1. Change of longitudinal force due to slip rate  $s$  [1]

## 2. Modelowanie zjawisk w obszarze styku opony z podłożem

Jedną z pierwszych teorii powstałych dla wyjaśnienia zjawisk zachodzących w obszarze styku bieżnika z podłożem sformułował Julien [7]. Zgodnie z nią, przy obciążeniu opony momentem zewnętrznym jej bieżnik podlega odkształceniu wzdłużnemu. Wartość tego odkształcenia zmienia się na długości śladu i w obszarze sprężystym można ją wyrazić zależnością:

$$e = e_0 + x \cdot e', \quad (1)$$

gdzie:  $e_0$  - to odkształcenie bieżnika opony na początku śladu,

$e'$  - stanowi współczynnik przyrostu odkształcenia liniowego na długości śladu styku,

$x$  - jest współrzędną punktu leżącego na długości śladu styku (mierzoną od jego początku).

Jeżeli założymy, że wpływ odkształcenia bieżnika na początku śladu jest niewielki, a współczynnik  $e'$  jest miarą poślizgu wzdłużnego  $s$  to możemy zapisać:

$$\frac{dF_X}{dt} = c_{CX} \cdot x \cdot e' = c_{CX} \cdot x \cdot s. \quad (2)$$

W zależności tej wielkość  $c_{CX}$  wyraża sztywność wzdłużną bieżnika. Sumując oddziaływania na całej długości śladu otrzymujemy wartość siły wzdłużnej działającej w obszarze styku bieżnika z podłożem:

$$F_X = \int_{-a}^a c_{CX} \cdot x \cdot s \cdot dt = 2c_{CX} \cdot a^2 \cdot s = C_X \cdot s. \quad (3)$$

Wprowadzona w zależności (3) wielkość  $C_X$  nazywana jest wzdłużną sztywnością poślizgową opony i wyraża tangens kąta  $\Phi$  (rys.2) nachylenia linii charakterystyki  $F_X(s)$ :

$$2c_{CX} \cdot a^2 = C_X = \left. \frac{\partial F_X}{\partial s} \right|_{s=0}. \quad (4)$$

Analogiczna postać analityczna wyrażenia opisującego wzdłużną sztywnością poślizgową opony  $C_X$  jest osiągnięta w rozważaniach prowadzonych przy użyciu modelu szczotkowego [5,8,9]. Wielkość ta jest bardzo istotna ponieważ wykorzystuje się ją w wielu funkcjonujących obecnie modelach opisu zachowania opony. Przykładem może być model Dugoffa, który umożliwia wyznaczenie wartości sił stycznych przenoszonych przez koło w różnych stanach poślizgu wzdłużnego i boczego. Model ten dla czystego hamowania (lub napędzania) opisany jest przy pomocy następujących zależności [2]:

$$F_X = \frac{C_X \cdot s_x}{1 - s_x} \quad \text{dla } s_w \leq 0.5, \quad (5a)$$

$$F_X = \frac{C_X \cdot s_x}{1 - s_x} \left( \frac{4 \cdot s_w - 1}{4 \cdot s_w^2} \right) \quad \text{dla } s_w > 0.5, \quad (5b)$$

gdzie oznaczono:

$$s_w = \frac{C_x \cdot s_x}{\mu \cdot F_z \cdot (1 - s_x)}, \quad \mu = \mu_0 \cdot (1 - k \cdot v_{s\delta}), \quad v_{s\delta} = v_{sx} \cdot s_x,$$

- $F_z$  - obciążenie normalne koła,
- $s_x$  - poślizg wzdłużny koła,
- $v_{sx}$  - prędkość środka koła względem podłoża,
- $v_{s\delta}$  - prędkość poślizgu koła,
- $\mu_0$  - współczynnik przyczepności przylgowej wycinka elementarnego gumy bieżnika do podłoża,
- $k$  - współczynnik wpływu prędkości poślizgu na przyczepność gumy bieżnika do podłoża.

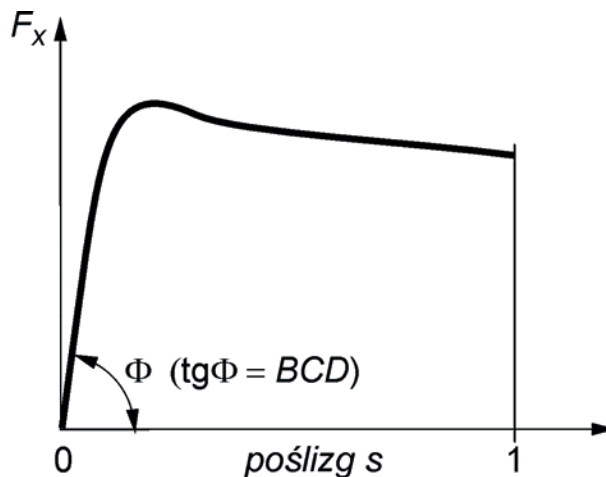
Kolejnym rozwiązaniem, w którym można odnaleźć współczynnik wzdłużnej sztywności poślizgowej opony  $C_x$  jest model Pacejki. W modelu tym zapis matematyczny podstawowej charakterystyki koła ogumionego (tzw. funkcji Pacejki  $F(s)$ ) jest następujący:

$$F(s) = D \cdot \sin \left[ C \cdot \arctan \left( B \cdot s - E \cdot (B \cdot s - \arctan(B \cdot s)) \right) \right]. \quad (6)$$

W tak ujętej formule argumentem funkcji jest zmienna  $s$ , którą w przypadku hamowania lub napędzania stanowi poślizg wzdłużny koła. Mimo braku podstaw fizycznych formuły, iloczyn współczynników BCD (rys.2) jest interpretowany w niej jako współczynnik sztywności poślizgowej opony (analogicznie do współczynnika  $C_X$  w modelu Dugoffa).

### 3. Charakterystyka sprężystości obwodowej opony

W badaniach prowadzonych dotychczas w Laboratorium Pojazdów Mechanicznych Instytutu Pojazdów Mechanicznych i Transportu do opisu właściwości opon w kierunku wzdłużnym wykorzystywano charakterystykę sprężystości obwodowej opony. Charakterystyka ta przedstawia zależność wzdłużnej reakcji stycznej  $X_K$  od stycznego przesunięcia osi koła  $l_X$  (rys.3). Pod działaniem sił stycznych obwodowych, które występują w obszarze styku koła z drogą (napędzanie, hamowanie), następuje obwodowe odkształcenie powłoki opony. Widoczne ograniczenie wartości siły wzdłużnej jest rezultatem odkształceń sprężystych powłoki i występującego w strefie styku koła z podłożem poślizgu odkształceniowego i rzeczywistego. Na podstawie przebiegu początkowego fragmentu charakterystyki obwodowej, uwarunkowanego przede wszystkim sprężystym odkształceniem powłoki, wyznaczane są wartości sztywności obwodowej zgodnie z zależnością:



Rys.2. Interpretacja geometryczna współczynnika wzdłużnej sztywności poślizgowej opony  $C_X$   
 Fig.2. Geometrical interpretation of longitudinal slip stiffness  $C_X$

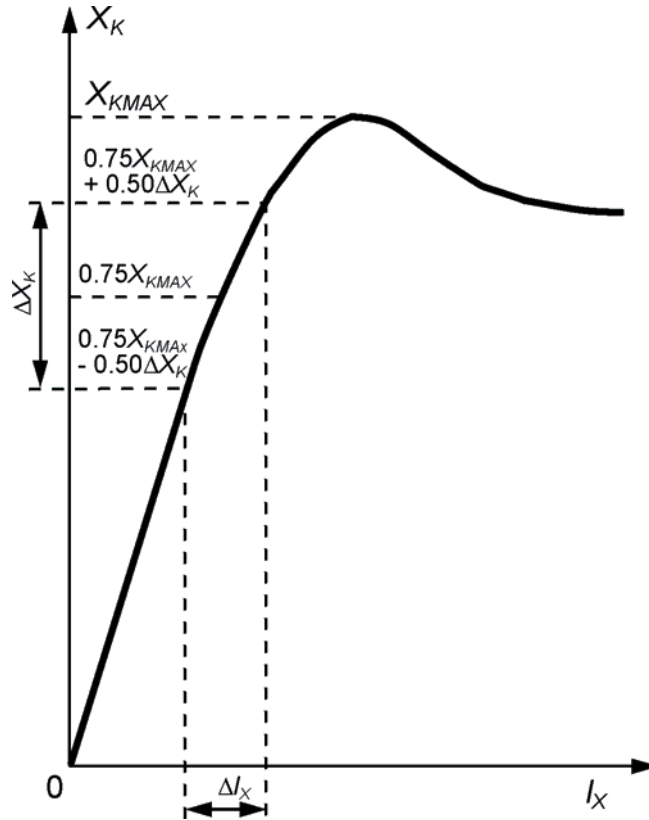
$$c_O = \frac{\Delta X_K}{\Delta l_X} \quad [\text{N/m}], \quad (7)$$

gdzie:  $\Delta X_K$  - przyrost wartości stycznej reakcji wzdłużnej,

$\Delta l_X$  - przyrost odkształcenia obwodowego powłoki opony (sposób określenia wartości  $\Delta X_K$  i  $\Delta l_X$  pokazuje rysunek 3).

Charakterystyka ta niestety jest mało przydatna do prowadzenia rozważań dotyczących dynamiki ruchu pojazdu, na przykład w aspekcie jego bezpieczeństwa czy rekonstrukcji zdarzeń drogowych. Posiadana baza laboratoryjna będzie obecnie modernizowana, w ten sposób, że możliwym stanie się pozyskiwanie przebiegu siły wzdłużnej w funkcji poślizgu. Pozostaje jednak problem czy istnieje możliwość oszacowania współczynnika sztywności poślizgowej opony  $C_X$  na podstawie charakterystyki sprężystości obwodowej opony,

a w szczególności wartości sztywności obwodowej. Znalezienie takiego przekształcenia pozwoliłoby na wykorzystanie w obliczeniach symulacyjnych bogatej bazy wyników badań wielu konstrukcji opon (nawet tych, na których nie jest możliwe dokonanie badań uzupełniających). Z tego względu w dalszej części pracy skupiono się na poszukiwaniach zależności wiążących ze sobą wartości poślizgu lub współczynnika sztywności poślizgowej opony  $C_x$  z odkształceniem opony, wartościami współczynnika sztywności, a więc wielkościami mierzonymi przy użyciu charakterystyki sprężystości obwodowej opony.



Rys.3. Charakterystyka obwodowej sprężystości opony  
Fig.3. Characteristic of tire longitudinal elasticity

Dokonując przeglądu literatury zwrócono uwagę na półempiryczny model kinematyczny przedstawionym w [1], w którym założono, że siła  $F$  w obszarze styku koła z podłożem jest zależna od odkształcenia opony (reprezentowanego przez znormalizowany poślizg wzdłużny  $s_z$ ) i jej sztywności  $c$ , co zapisano jako:

$$F = h(s_z) = c \cdot s_z . \quad (8)$$

Podobny sposób postępowania wykorzystano w modelu Dahl'a, który został sformułowany do opisu zjawisk w układach pracujących w obecności tarcia. W modelu tym wykorzystano przesunięcie względne stykających się ze sobą elementów  $x_{posl}$  i ich prędkość względną  $v_{posl}$ , a także siłę tarcia  $F$  i maksymalną siłę tarcia  $F_C$  (wyznaczoną zgodnie z klasycznym prawem Coulomba) i zapisano go w następującej postaci:

$$\frac{dF}{dx_{posl}} = c_D \cdot \left( 1 - \frac{F}{F_C} \operatorname{sgn}(v_{posl}) \right)^\beta . \quad (9)$$

W zależności tej pojawia się współczynnik sztywności  $c_D$  i parametr  $\beta$  decydujący o sposobie przebiegu (kształcie) linii charakterystyki modelu. Istotą tego rozwiązania jest to, że siła tarcia stanowi jedynie funkcję przemieszczenia względnego i zwrotu prędkości względnej  $v_{post}$ . Przy dalszych przekształceniach prowadzonych w dziedzinie czasu, dla warunków quasistatycznych i  $\beta = 1$  otrzymuje się zależność

$$F = c_D \cdot s_D, \quad (10)$$

której postać jest podobna do wykorzystywanej w modelu kinematycznym, z tą różnicą, że wielkość  $s_D$  reprezentuje aktualne przesunięcie względne (w modelu kinematycznym wielkość  $s_Z$  jest znormalizowanym przesunięciem względnym).

W modelu opisanym w [9] uwzględniono właściwości elastyczne opony oraz długość relaksacji jej powłoki. Na rysunku 4 przedstawiającym schematycznie omawiany model oznaczono:

- $V_{sx}$  - prędkość postępową koła,
- $V_{c,sx}$  - prędkość poślizgu bieżnika,
- $c_{b\Theta}$  - sztywność kątową boku opony (odkształcenie katowe),
- $c_b$  - sztywność boku opony (odkształcenie liniowe),
- $c_{CX}$  - sztywność bieżnika w kierunku obwodowym (obwodowe odkształcenie bieżnika),
- poślizg bieżnika wynikający z wartości współczynnika wzdłużnej poślizgowej sztywności opony  $C_X$  i prędkość koła  $V_{cr}$  (obliczanej jako iloczyn prędkości obrotowej koła oraz promienia tocznego  $r_T$ ),
- $\sigma_{rel,c}$  - długość relaksacji bieżnika,
- $\sigma_{rel}$  - długość relaksacji całej opony.

Do wyznaczenia długości relaksacji opony, wykorzystano następującą zależność:

$$\sigma_{rel} = C_X \left( \frac{1}{c_{CX}} + \frac{1}{c_b} + \frac{r_D^2}{c_{b\Theta}} \right). \quad (11)$$

Zapisano również, że w przypadku gdy na całym obszarze styku opony z podłożem występuje jedynie poślizg odkształceniowy długość relaksacji bieżnika wynosi  $\sigma_{rel,c}$  i jest równa połowie długości śladu opony  $a$ .

Wobec powyższego autorzy sformułowali założenie, że powinna istnieć proporcja pomiędzy długością śladu opony  $a$ , sztywnością obwodową opony  $c_O$  i współczynnikiem wzdłużnej sztywności poślizgowej opony  $C_X$ :

$$C_X \approx a \cdot c_O \quad (12)$$

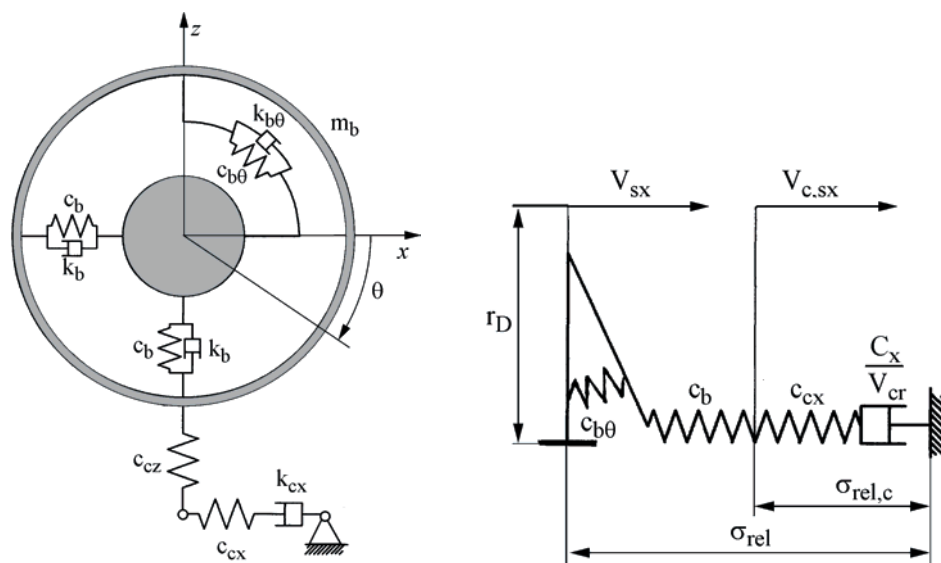
Tak postawione założenie sprawdzono w przedstawionych poniżej badaniach własnych.

#### 4. Badania własne

Do badań wybrano 5 obiektów kierując się ogólnymi kryteriami, które sformułowano w sposób następujący:

- wybrane ogumienie ma stanowić próbę reprezentatywną dla odzwierciedlenia tendencji w rozwoju konstrukcji opon samochodowych;
- opony należą do popularnej, często eksploatowanej grupy rozmiarowej ogumienia.

W rezultacie do badań stanowiskowych wybrano pięć typów ogumienia, którego ogólną charakterystykę zamieszczono w tabeli 1.



Rys. 4. Modelowanie współpracy opony z podłożem z wykorzystaniem zjawiska poślizgu [5]  
 Fig. 4. Modeling of tyre/road interaction with slip phenomenon [5]

Tab.1. Ogólna charakterystyka badanych opon  
 Tab. 1. General profile of test tyres

Opona	Obciążenie nominalne, daN	Nominalne ciśnienie powietrza $p_K$ , kPa	LI / klasa prędkości	Budowa wewnętrzna			
				Osnowa		Opasanie	
				Materiał	Liczba warstw	Materiał	Liczba warstw
<b>TC Dębica</b> 165R13 Tersus	475	250	82 / T	poliester	1	stal	2
<b>GoodYear</b> 165/80R13 Club	487	300	83 / T	poliester	1	stal	2
<b>Uniroyal</b> 175/70R14 Rallye 440	500	300	84 / H	poliester	1	stal poliamid	2 1
<b>Stomil Olsztyn</b> 185/70R14 Kormoran2000	560	300	88 / H	wiskoza	1	stal poliamid	2 1
<b>Barum</b> 185/70R14 Brawura	560	350	88 / H	poliester	1	stal poliamid	2 2

Badania objęły wyznaczenie charakterystyk sprężystości obwodowej opon i długości śladu opony w następujących warunkach:

- ciśnienie powietrza w oponie:  $p_K = 200$  kPa,
- obciążenie normalne koła:  $Z_K = 300$  daN.

Warunki badań dobrano odpowiednio do możliwości przyczepy dynamometrycznej SRT-3 [6], ponieważ w dalszych obliczeniach i oszacowaniach wykorzystano wcześniej dokonane tym urządzeniem pomiary charakterystyk  $F_X(s)$  (pomiary na różnych nawierzchniach dróg przy różnych prędkościach jazdy). Z charakterystyk tych wyznaczono wartości współczynnika wzdłużnej sztywności poślizgowej badanych opon  $C_X$ . Wyniki pomiarów i obliczeń zestawiono w tabeli 2.

Tab.2. Zestawienie wyników pomiarów  
Tab.2. List of research results

Opona	Sztywność obwodowa N/m	Długość śladu $2a$ , m	Współczynnik wzdłużnej sztywności poślizgowej $C_X$ , N
<b>TC Dębica</b> 165R13 Tersus	110000	0.159	115650
<b>GoodYear</b> 165/80R13 Club	120100	0.164	120120
<b>Uniroyal</b> 175/70R14 Rallye 440	92000	0.147	128160
<b>Stomil Olsztyn</b> 185/70R14 Kormoran 2000	132000	0.134	118500
<b>Barum</b> 185/70R14 Bravura	93000	0.138	146700

W kolejnym kroku sprawdzono proporcję zaproponowaną w zależności (12). Rezultat dokonanych obliczeń przedstawiono na rysunku 5, na którym umieszczono również linię obrazującą wyznaczone równanie regresji liniowej:

$$C_X = -9.7914 \cdot a \cdot c_O + 202458. \quad (13)$$

Na rysunku tym wyraźnie zaznacza się tendencja do zmniejszania wartości współczynnika wzdłużnej sztywności poślizgowej opony  $C_X$  przy zwiększaniu wartości sztywności obwodowej badanych opon. Widoczne są również rozbieżności (od linii trendu), które prawdopodobnie wynikają z przyjętych uproszczeń dotyczących m.in. określenia długości relaksacji opony.

## 5. Podsumowanie

W pracy dokonano przeglądu zależności opisujących właściwości opony w obszarze jej odkształceń sprężystych (poślizg odkształceniowy). Dokonana analiza i przeprowadzony eksperyment pozwolił na sformułowanie zależności pomiędzy wynikami statycznych badań laboratoryjnych i rezultatami badań dynamicznych współczynnika wzdłużnej sztywności poślizgowej opony  $C_X$ . Osiągnięte efekty pozwalają przypuszczać, że dalsze prace zmierzające do identyfikacji elementów składowych, wpływających na przykład na długość relaksacji opony, mogą w przyszłości skutkować uzyskaniem sprawnego algorytmu pozyskania wiarygodnych wartości współczynnika wzdłużnej sztywności poślizgowej.

## Literatura

- [1] Canudas de Wit, C., Tsiotras, P. i inni, *Dynamic Friction Models for Road/Tire Longitudinal Interaction*, Vehicle System Dynamics, vol.29, 3, pp. 189-226, 2003.
- [2] Lanzendoerfer, J., Szczepaniak, C., *Teoria ruchu samochodu*, WKiŁ, ISBN 8320601177, Warszawa, 1980.



- [1] Maurice, J. P., Zegelaar, P. W. A., Pacejka, H. B., *The Influence of Belt Dynamics on Cornering and Braking Properties of Tyres*, The dynamics of vehicles on road and tracks; proceedings of the 15<sup>th</sup> IAVSD Symposium, Budapest, pp. 299-311, August 25-29, 1997.
- [2] Miyashita, N., Kawazura, T., Kabe, K., *Analytical Model of  $\mu$ -s curve using generalized skewed-parabola*, JSAE Review, 24, pp. 87-92, 2003.
- [3] Pacejka, H. B., *Tyre and Vehicle Dynamics*, Butterworth & Heinemann, ISBN: 0750651415, 2002.
- [4] Pokorski, J., Szwabik, B., *Doświadczalne i obliczeniowe charakterystyki przyczepności opon samochodowych i nawierzchni drogowych*, Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów Politechniki Warszawskiej, 3, pp. 73-84, 2001.
- [5] Wong, J. Y., *Theory of Ground Vehicles (third edition)*, ISBN:0471354619, 2001.
- [6] Yamazaki, S., Furukawa, O., Suzuki, T., *Study on Real Time Estimation of Tire to Road Friction*, Vehicle System Dynamics Supplement 27, pp. 225-233, 1997.
- [7] Zegelaar, P. W. A., Pacejka, H. B., *Dynamic Tyre Responses to Brake Torque Variations*, Vehicle System Dynamics Supplement 27, pp. 65-79, 1997.

